Полученнные модели нашли практическое применение в разработанных алгоритмах и программах оптимизации режимов работы СЭО города Харькова.

Получено 21.01.2003

УДК 621.3

А.А.ХАРИСОВ, канд. техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства

К ВОПРОСУ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ УЕДИНЕННЫХ ПРЯМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ

С использованием методов электродинамики сплошных сред проведен анализ статистического распределения плотности постоянного электрического тока в поперечном сечении уединенных прямых цилиндрических проводников. Установлено. что при постоянном токе в поперечном сечении уединенных прямых цилиндрических проводников распределение плотности тока имеет вид нормального ("колоколообразного") распределения.

В существующей практике расчетов электрических и магнитных полей, создаваемых прямыми цилиндрическими проводниками, по которым протекает постоянный электрический ток, обычно априорно полагается, что плотность тока в поперечном сечении проводников распределяется равномерно

$$J = I / S, \qquad (1)$$

где I – постоянный электрический ток в проводнике; S – площадь поперечного сечения проводника.

Однако, реальное распределение субъектов носителей тока в поперечном сечении проводников при постоянном токе далеко не такое простое, а как и во многих других случаях диафрагмированных, преимущественно направленных, перемещающихся статистических ансамблях, должно принимать некое нормальное (колоколообразное) распределение по скоростям, а следовательно и плотности тока в направлении преимущественного перемещения.

В пользу нормального распределения постоянного тока в поперечном сечении прямых цилиндрических проводников свидетельствует и известное явление пинч-эффекта, т.е. явление стягивания носителей электрического тока к центру инерции поперечного сечения проводников, по которым проходит постоянный ток, вследствие воздействия на субъекты носителей тока ими же создаваемого магнитного поля.

Предварительный анализ с учетом выше сделанных замечаний показывает, что в наиболее простом случае прямого круглого цилиндрического проводника с установившимся постоянным током и температурным режимом, статистическое распределение плотности тока в плоскости поперечного сечения проводника при отсутствии внешнего электромагнитного поля представляется в виде

$$J_0(x,y)=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{}\right)^2}\right] \text{ или}$$

$$J_0(\vec{r})=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0}{}\right)^2}\exp\left[-\frac{r^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{}\right)^2}\right], \qquad (2)$$

где x, y или $\vec{r}$ – текущие координаты в прямоугольной или полярной декартовой системе координат в плоскости поперечного сечения проводника с началом координат в точке симметрии поперечного сечения проводника; $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_0(x,y)dy$ – полный ток в плоскости поперечного сечения прямого круглого цилиндрического проводника; r_0 – внешний радиус прямого круглого цилиндрического проводника.

С целью проверки адекватности выше представленного распределения плотности тока в поперечном сечении прямых круглых цилиндрических проводников при протекании через них постоянных токов, задаваясь распределением плотности тока (2), найдем выражение их омического сопротивления через электромагнитные поля, создаваемые полным током проводника.

В качестве исходного расчетного выражения для этой цели используем известное энергетическое соотношение электродинамики сплошности сред [1]

$$RI^2=\int\left[\vec{E}\vec{H}\right]d\vec{f}\ , \qquad (3)$$

где R – омическое сопротивление проводника; I – полный ток проводника; $\vec{E},\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного поля, создаваемые полным током проводника; $\int ...d\vec{f}$ – интегрирование ведется по поверхности проводника.

В качестве граничного условия задачи принимаем проекцию напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$, делящую проводник на две симметричные половины:

$$E_z(x,y)\big|_{z=0}=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2\gamma_0(T)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \tag{4}$$

где $\gamma_0(T)$ – удельная проводимость материала проводника; l – длина прямого круглого цилиндрического проводника по оси z.

Так как электрический ток в проводнике и проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$ имеет постоянные значения, задача удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

При таких условиях задачи при определении сопротивления проводника по формуле (3) интегрирование проводится по плоскости $z=0$. Кроме того, решение задачи достаточно найти в области $z>0$, предусмотрев увеличение значений полей в два раза в решении системы электростатических уравнений Максвелла.

Итак, для определения компонент напряженности электромагнитного поля, создаваемых током проводника, используем электростатические уравнения Максвелла:

$$\begin{gathered}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;\; -\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x};\\ \frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_x}{\partial x}=0;\; \frac{\partial H_y}{\partial y}-\frac{\partial H_x}{\partial x}=\gamma_0(T)E_z.\end{gathered} \tag{6}$$

Переходя к компонентам поля Фурье, получим:

$$E_{xk} = -j\frac{k_x}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};\; E_{yk} = -j\frac{k_y}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};$$
$$H_{xk} = -j\gamma_0(T)\frac{k_y E_{zk}}{k^2};\; H_{yk} = j\gamma_0(T)\frac{k_x E_{zk}}{k^2};\; k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \qquad (7)$$

В общем виде значение компоненты поля Фурье E_{zk}, удовлетворяющее граничному условию (5), принимаем в форме

$$E_{xk} = j\frac{k_x}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\oint J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]d\vec{k}, \qquad (8)$$

где

$$E_k\left(\oint J\right) = \frac{1}{\gamma_0(T)}\int J(\vec{r})\exp(-j\overleftarrow{k}\vec{r}) \qquad (9)$$

– постоянная интегрирования.

Применяя обратное преобразование Фурье к (7), получим решение системы электростатических уравнений Максвелла в виде

$$E_x(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\oint J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k}d\vec{k};$$
$$E_y(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\oint J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k}d\vec{k}; \qquad (10)$$
$$H_x(\vec{r}) = -j\frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\oint J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k}d\vec{k};$$
$$H_y(\vec{r}) = j\frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\oint J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k}d\vec{k}.$$

Принимая в уравнениях (10) $z = 0$ и подстановки их $\left[\vec{E}\vec{H}\right]\Big|_{z=0} = E_x(\vec{r})H_y(\vec{r}) - E_y(\vec{r})H_x(\vec{r})$ в (3), получим искомое значение мощности омических потерь в прямом круглом цилиндрическом проводнике в виде

$$I^2R = \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_k\left|\left(\oint J\right)\right|^2\frac{d\vec{k}}{k}. \qquad (11)$$

Воспользовавшись граничным условием (4), выражением постоянной интегрирования (9) и интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\xi^2)d\xi = \sqrt{\pi/\alpha}\,,$$

получим значение постоянной интегрирования

$$E_k\left(\int J\right) = \frac{I}{\gamma_0(T)} \exp\left[-\frac{k^2\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}{4}\right]. \qquad (12)$$

После подстановки постоянной интегрирования (12) в (11) и перехода в цилиндрическую систему координат в k -пространстве получаем

$$I^2R = \frac{I^2}{4\pi^2\gamma_0(T)} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{2k^2\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}{4}\right] \times \int_0^{2\pi} \exp(jk\cos\varphi)d\varphi dk \cdot \qquad (13)$$

Сокращая токи с обеих сторон уравнения (13) и заменяя последний интеграл в его правой части функцией Бесселя, приходим к выражению

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma_0(T)} \int_0^{\infty} J_0(k) \exp\left[-\frac{2k^2\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}{4}\right] dk \cdot \qquad (14)$$

Используя для вычисления интеграла по dk в (14) известное соотношение [2]

$$\int_0^\infty J_0(k)\exp\left[-\frac{2k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}{4}\right]dk=\left[\frac{\pi}{2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right]^{1/2}=\frac{2l}{r_0^2}, \quad (15)$$

находим значение омического сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника в виде классического закона Ома

$$R=\frac{l}{\gamma_0(T)\pi r_0^2}. \quad (16)$$

В случае прямых эллиптических цилиндрических проводников с установившимся токовым и температурным режимом, для которых закон Ома записывается в виде

$$R=\frac{l}{\gamma_0(T)\pi ab}, \quad (17)$$

распределение плотности тока в их поперечном сечении принимает вид эллиптического нормального распределения

$$J_0(x,y)=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{ab}}{}\right)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{ab}}{}\right)^2}\right], \quad (18)$$

где a и b – полуоси поперечного сечения эллиптического цилиндрического проводника соответственно по осям x, y.

В общем случае для прямых цилиндрических проводников с произвольной формой поперечного сечения, омическое сопротивление проводника представляется выражением

$$R=\frac{l}{\gamma_0(T)}\left(\frac{2}{\pi ab+F}\right), \quad (19)$$

где a и b – полуоси эллипса, вписанного в поперечное сечение проводника (или круга $a=b$); F – площадь поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

При этом максимальная плотность тока колоколообразного распределения будет всегда находиться в точке центра инерции поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

И, наконец, для сравнения найдем выражение закона Ома для прямого цилиндрического проводника в предположении равномерного распределения плотности тока

$$J(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi r_0^2}, & |\vec{r}| \le r_0, \\ 0, & |\vec{r}| > r_0. \end{cases} \tag{20}$$

В этом случае граничное условие, т.е. проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$ и общее решение системы электростатических уравнений Максвелла принимают вид

$$E_z(\vec{r})\big|_{z=0} = \frac{I}{\gamma_0(T)\pi\left(\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}, \quad \vec{r} \le r_0; \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \frac{j}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\int J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k}\,d\vec{k}\,; \\ E_y(\vec{r}) &= \frac{j}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\int J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k}\,d\vec{k}\,; \\ H_x(\vec{r}) &= -\frac{j\gamma_0(T)}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\int J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_y}{k^2}\,d\vec{k}\,; \\ H_y(\vec{r}) &= \frac{j\gamma_0(T)}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} E_k\left(\int J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right]\frac{k_x}{k^2}\,d\vec{k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя (21) в (8), получаем

$$E_k\left(\int J\right) = \frac{I}{\gamma_0(T)}\int \frac{I}{\pi\left(\dfrac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp(-j\vec{k}\vec{r})\,. \tag{23}$$

После подстановки постоянной интегрирования в (11) и ввода цилиндрической системы координат в $\vec{k}$-пространстве приходим к выражению

$$R = \frac{1}{\pi\gamma_0(T)\left(\frac{r_0^2}{l}\right)^2} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2} dk\,, \tag{24}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода.

Значение интеграла в (24) известно [2]

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1^2\left(k\frac{r_0^2}{l}\right)}{k^2} dk = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{r_0^2}{l}\,. \tag{25}$$

Подставив значение интеграла (25) в (24), получим выражение сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника постоянному току в предположении равномерного распределения плотности тока в его поперечном сечении

$$R = \frac{2l}{3\pi^2 r_0^2 \gamma_0(T)}\,. \tag{26}$$

Как видим, в предположении равномерного распределения плотности тока в поперечном сечении прямого круглого цилиндрического проводника полученное значение сопротивления существенно отличается от классического закона Ома.

1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИФМЛ, 1959.

2.Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963.

Получено 21.01.2003

УДК 681.32

Н.О.МАНАКОВА
Харьковская государственная академия городского хозяйства

МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В РЕГИОНАЛЬНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЯХ

Рассматриваются методика проектирования информационной системы управления городской инженерной сети, предлагается формализованный метод исследования ин-